Corrigé type : physique numérique /3PF

Exercice 01(6points): (interpolation polynomiale)

Polynôme de Newton d'ordre 3 :

$U = P_3(t) = U_0 + \delta U_0(t - t_0) + \delta^2 U_0(t - t_0)(t - t_1) + \delta^3 U_0(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$ 01pt

Tableau de différences divisées :

t(s)	U(V)	δU	δ²U	δ³U
1,5	**2,5**			
2	4	**3**		
3	4	0	**-2**	
3,5	2,5	-3	-2	**0**

01.5pt

$U = 2.5 + 3(t - 1.5) - 2(t - 1.5)(t - 2) + 0$ 01.5pt

$U = -2t^2 + 10t - 8$

L'instant t où la tension devrait atteindre son **maximum** U_{max}

correspond $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = -4t_m + 10 = 0 \Rightarrow t_m = \frac{10}{4} = 2.5\ s$ 01.pt

- La tension atteindre son **maximum** U_{max} à t= 2.5s
- La valeur de $U_{max} = U(t_m) = -2(2.5)^2 + 10(2.5) + 8 = 4.5\ Volt$ 01.pt

Exercice 02(07points) : (moindres carrés)

Ajustement par la méthode des moindres carrés avec un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

L'expression des moindres carrés : $J = \sum_{i=1}^{i=5}(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$ 01pt

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \Leftrightarrow -2\sum(y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0 \Leftrightarrow -2\sum[x_i(y_i - a_0 - a_1 x_i)] = 0 \end{cases}$$ 01pt

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$ 01pt

$$a_1 = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \quad ; \quad a_0 = \frac{\sum y_i - a_1 \sum x_i}{n}$$ 01pt

n=6

	xi	yi	xi²	xi*yi
	T	log(u)	T²	T*log(u)
	0	2,0819	0	0
	15	1,8611	225	27,9165
	30	1,6403	900	49,209
	45	1,4195	2025	63,8775
	60	1,1987	3600	71,922
	75	0,9779	5625	73,3425
somme=	**225**	**9,1794**	**12375**	**286,2675**

02 pts

a1=	-0,0147	$yi = 2,0819 - 0,0147\ x$
a0=	2,0819	

$log(u) = 2,0819 - 0,0147\ T$ 01pt

Exercice 03 (7points): (équation différentielle)

L'équation différentielle (1) suivante : $\begin{cases} y'(t) = f(y,t) = 9.8 - 0.2y(t) \\ y(0) = 0. \quad \text{à} \quad t = 0 \end{cases}$

1-Vérification que $\boldsymbol{y(t) = 49(1 - e^{-0.2t})}$ est la solution analytique de l'équation (1)

On a par dérivation ; $\boldsymbol{y'^{(t)} = 9.8e^{-0.2t}}$, et (1) → $y' + 0.2\,y = 9.8$

02pt

$$\mathbf{y' + 0.2y = 9.8e^{-0.2t}} + 0.2\,y(t)$$
$$= \mathbf{9.8e^{-0.2t}} + 0.2 * \mathbf{49(1 - e^{-0.2t})} = 9.8$$

2. On a la formule d'Euler : $\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i) \end{cases}$

01pt

On a $\boldsymbol{t_0 = 0}$; $\boldsymbol{y_0 = 0}$ et $f(y_0, t_0) = 9.8 - 0.2 * 0 = 9.8$

- $\boldsymbol{t_1 = t_0 + h = 0.1}$: $y_1 = y_0 + 0.1 * f(y_0, t_0) = 0.98$
- $\boldsymbol{t_2 = 0.2}$: $y_2 = y_1 + 0.1 * f(y_1, t_1)$

  $= 0.98 + 0.1 * (9.8 - 0.2 * 0.98) = 1.9404$

02pt

t(s)	Y(t)Euler	Analyt.	erreur
0.1	0.9800	0.9703	0.0097
0.2	1.9404	1.9213	0.0191
0.3	2.8816	2.8535	0.0281
0.4	3.8040	3.7673	0.0367

02pt